INTEGRALES

I) Integral indefinida.

Funciones primitivas

Definición. Sea f una función, se dice que F, función derivable, es una primitiva de f si se verifica F '=f

Ejemplo 1. Si $f(x)= 3x^2$ una primitiva es $F(x)= x^3$. Otra $G(x)= x^3+7$

Proposición.1. Si F es una primitiva de f entonces F +C también lo es.
En efecto ya que (F +C)'=F'+C'= F' +0= f
Proposición.2. Si una función f tiene derivada nula en un intervalo entonces f es constante. (se admite sin demostración)
Teorema. Si F_1 y F_2 son primitivas de f, entonces se diferencian en una constante, es decir $F_1= F_2+C$
Demostración
Si F_1 es primitiva de f $\Rightarrow F_1'(x)= f(x)$; si F_2 es primitiva de f $\Rightarrow F_2'(x)= f(x)$
Luego $F_1'(x)- F_2'(x)= 0 \Rightarrow F_1-F_2= C$
Consecuencia. Dada una primitiva F de f, el conjunto de sus primitivas es F +C. A dicho conjunto se le llamará *la integral indefinida* de f y se escribirá $\int f$ ó $\int f(x)dx$.

A f(x) se le llama integrando y al símbolo $\int$, símbolo de integración.

Propiedades de la integral indefinida (Linealidad)

1) $\int f_1 + f_2 = \int f_1 + \int f_2$

Es consecuencia de que la derivada de la suma es la suma d las derivadas

2) $\int kf = k\int f$

Es consecuencia de que si F es primitiva de f $\Rightarrow$ kF es primitiva de kf, pues (kF)'= kF'= kf

Tabla de primitivas (hacerla teniendo en cuenta la tabla de derivadas y la relación entre ambas).

Integrales inmediatas (o "casi inmediatas")
Llamamos así a aquellas que no requieren de ningún método para encontrar una primitiva, sino del simple reconocimiento de la función que se ha derivado. Son las que daremos en este curso.

Ejemplo 2. a) $\int (x^3 - 2x + 1)dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + x + C$

b) $\int \frac{1}{2+x} dx = \ln|2+x| + C$

c) $\int \frac{3}{1+x^2} dx = 3arctgx$

Ejercicios

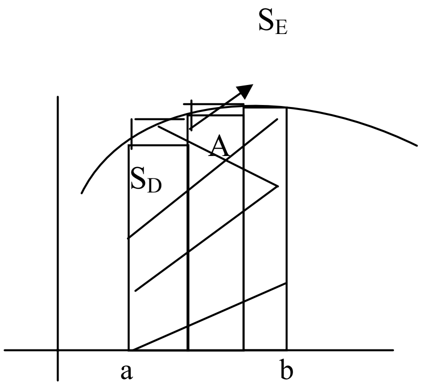
Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int (x^3 - 3x^2 - \frac{1}{3}x + 2)dx$; b) $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx$; c) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$; d) $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} dx$; e) $\int \cos 5x dx$;

f) $\int \frac{x^3+5x^2+x-4}{x} dx$; g) $\int 3e^{3x} dx$; h) $\int xsen(x^2+1)dx$; i) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

II) La integral definida. Significado geométrico

INTRODUCCIÓN : ***Problema del cálculo de un área***



Si A es el área buscada se tiene

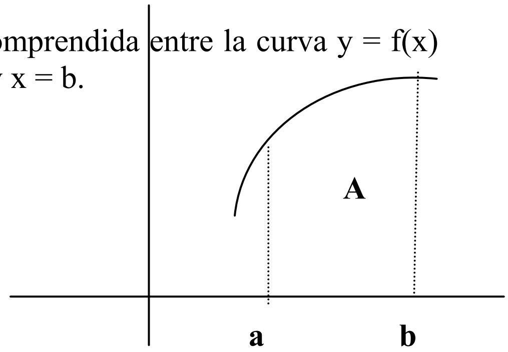
$$S_D < A < S_E$$

Cuando el número de divisiones del intervalo [a, b] crezca indefinidamente las áreas por defecto y por exceso coincidirán y ese valor común será el área encerrada
(Intuitivo. No lo formalizamos)

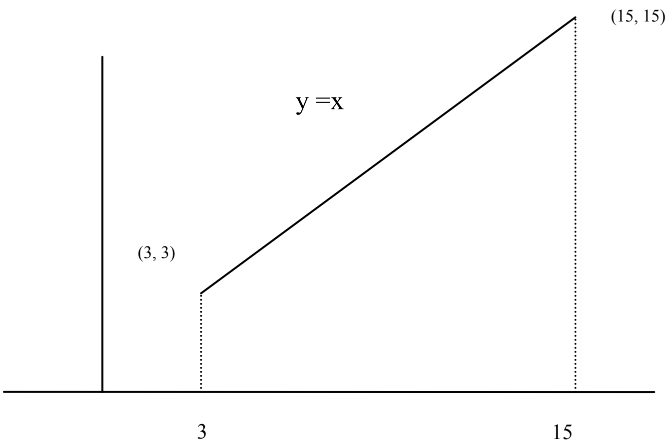
A ese valor se le llama la **integral definida** de f en [a, b]. Se escribirá: $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$

Áreas de recintos planos

Geométricamente la integral definida mide el **área** comprendida entre la curva y = f(x) (f positiva en [a, b]) el eje de las X y las rectas x = a y x = b.



Ejemplo 1. Vamos a expresar mediante una integral el área del trapecio de vértices: (3, 0), (15, 0), (15, 15) y (3, 3), (ver figura)
Necesitamos conocer la expresión de la recta que pasa por los puntos (3, 3) y (15, 15), en este caso es trivial, es y = x.



El área viene dada por : A = $\int_3^{15} x\,dx$

Relación entre la integral definida y la indefinida

La regla de Barrow nos relaciona la primitivas de una función con la integral definida, y es lo que utilizaremos para el cálculo de áreas planas.

Regla de Barrow

Si f es continua en [a, b] y G es una primitiva de f $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$

Ejemplo 2. El valor del área del ejemplo 1 es:

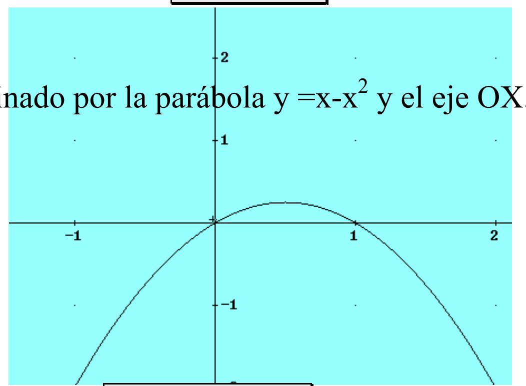
A = $\int_3^{15} x\,dx \;= \frac{x^2}{2}\Big|_3^{15} = \frac{225}{2} - \frac{9}{2} = \frac{216}{2} = 108$ (comprobarlo)

Área encerrada entre dos curvas

Teniendo en cuenta los resultados anteriores el **área** que encierra una curva f con el eje de abscisas y las rectas x = a y x = b se puede calcular así: $\boxed{A = \int_a^b |f|}$, ya que de esta manera será la función siempre positiva.

Ejemplo 3. Calcula el área del recinto determinado por la parábola y =x-x^2 y el eje OX.
Solución

$$\int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

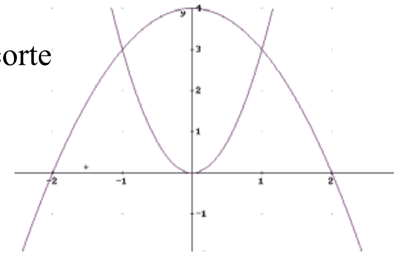


El área encerrada por dos curvas f y g entre a y b será $\boxed{A = \int_a^b |f - g|}$

Ejemplo 4. Halla el área de la región comprendida entre las curvas determinadas por f(x)=4–x^2 y g(x)=3x^2.
Solución.
Dibujamos el recinto.
Los límites de integración son las abscisas de los puntos de corte de las gráficas, que se obtienen al resolver el sistema

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x^2 \end{cases}.$$

(Comprobar que dan -1 y 1)



Por tanto A = $\int_{-1}^{1} (4 - x^2 - 3x^2)dx = \int_{-1}^{1} (4 - 4x^2)dx = = (4x - \frac{4}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$ (comprobarlo)

Ejercicio 1. Hallar el área limitada por las gráficas de f(x)= x y g(x)= $\frac{x^3}{4}$

Ejercicio 2. Hallar el área limitada por las gráficas de las parábolas y =x^2 y x = y^2

Ejercicio 3. Los tres vértices de un triángulo son: A(0, 1), B(1, 2) y C(3, 0).
Calcula su área usando la integral definida

Problema propuesto en selectividad

Expresa por una integral el área del trapecio de vértices (3,0), (15,0), (15,15) y (3,3) y explicando el significado.